数理解析研究所講究録
第1744巻 2011年 1-10

実時間最終状態受理式決定性限定1カウンタ変換器の多項式時間等価性判定アルゴリズム

若月 光夫* 清野 和司† 富田 悦次‡ 西野 哲朗§

1 まえがき

決定性プッシュダウンオートマトン (dpda) の等価性判定問題は，Sénizergues により，任意のクラスに対する可解性が示されている ([8]). しかし，そのアルゴリズムは非常に複雑な方式である．dpda の等価性判定は，オートマトンや形式文法を基礎とするシステムの学習過程などにおいて主要な役割を果たすことができる ([9] 等). 従って，その効率化に対して，多項式時間内で等価性判定が可能なアルゴリズムの実現は非常に重要である．

筆者らは，分岐アルゴリズムと名付けた単純で直接的な等価性判定手法を提唱してきた ([2], [5] 等). この手法を用いることにより，状態が単一という制限を持つ単純決定性プッシュダウンオートマトン同士，あるいは，スタック記号が単一という制限を持つ決定性限定1カウンタオートマトン同士について，その等価性判定を多項式時間で解決するアルゴリズムを得ている ([4], [6], [7]).

一方，dpda に出力機構を付与した決定性プッシュダウン変換器 (dpdt) に対しても，その等価性判定に関する多くの成果が報告されている ([1], [8] 等). dpdt は，受理・非受理のみを判定する dpda に比較して，より実用的な意味を持ち重要であるが，その等価性判定は一般に非常に複雑になる．ここでも，分岐アルゴリズムを用いた簡単化の効果により，dpda の等価性判定とほぼ同レベルの複雑さで dpdt の等価性判定を行うことができ，筆者らはこれまでに幾つかの単純なアルゴリズムを示してきた ([3], [11], [12] 等). 特に，文献 [11] は，ε-推移を許した dpdt 対に対して，その等価性判定可能な範囲を従来より大きく拡張した最新の成果であり，現時点では，これを包含する結果は報告されていない．しかし，このアルゴリズムも最大手数としては指数関数的時間を要するものであった．そこで，筆者らは，多項式時間内で等価性判定を可解とする条件の追求を行っている．文献 [12] では，dpdt の部分クラスである，実時間空スタック受理式決定性限定1カウンタ変換器 (実時間空スタック受理式 droct) について，文献 [11] のアルゴリズムを対象 dpdt 対に特化して単純化することにより，その等価性判定が多項式時間で解決できることを証明した．また，文献 [14] では，文献 [12] のアルゴリズムを拡張することによって，ある条件下での ε-推移を許した空スタック受理式 droct 対に対しても，多項式時間で等価性を判定できることを示した．受理記号列集合部分が本質的に正則を超えるような変換器に対する等価性判定が多項式的に行えるとの結果は，文献 [12], [14] の他には，文献 [10] で示されているだけである．文献 [10] では，文献 [12], [14] の対象 dpdt のクラスとは比較不能な関係にある，単純決定性プッシュダウン変換器同士の等価性判定が多項式的に行えることを示しているが，thickness(文献 [4] 参照) をパラメータの一つとして用いており，これは対象とする変換器の記述長の指数オーダになり得る．

本稿では，文献 [12] 等とは受理方式の異なる，実時間最終状態受理式 droct 対に対する等価性判定が多項式時間で行えることを示す．

2 定義と表記法

本稿で使用する定義と表記法は，文献 [2], [3], [11], [12] を基礎としているので，これらの文献を参照されたい．ただし，読み易さの観点から，必要に応じて同じ定義を本稿中にも再度記述するものとする．

定義 2.1 (文献 [11], p.2676, 定義 2.1, 文献 [12], p.1189, 定義 2.1 参照) dpdt T を次のように表記する．$T=(Q,\Gamma,\Sigma,\Delta,\mu,q_0,Z_0,F)$. ここで，$Q$ は状態集合，Γ はスタック記号集合，Σ は入力記号集合，Δ は出力記号集合，μ は推移規則の集合，q_0 は初期状態，Z_0 は初期スタック記号，$F(\subseteq Q)$ は最終状態の集合を表す．なお，T が空スタック受理式の場合，$F=\emptyset$ と

*電気通信大学大学院情報理工学研究科
†東芝ソリューション株式会社
‡電気通信大学/中央大学研究開発機構
§電気通信大学大学院情報理工学研究科

明示して表すこととし，さもなければ，T は最終状態受理式とする．更に，μ の要素は，$p,q \in Q$, $A \in \Gamma$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $z \in \Delta^*$, $\theta \in \Gamma^*$ に対して，$(p,A)\xrightarrow{a/z}(q,\theta)$ のような形式をとる．ここで，z,q,θ の各々は p,A,a の組に対して一意に定められる．また，$a=\varepsilon$ である場合，この規則を ε-規則と呼び，このとき，いかなる $a' \in \Sigma$, $z' \in \Delta^*$, $(q',\theta') \in Q \times \Gamma^*$ に対しても，μ の要素に $(p,A)\xrightarrow{a'/z'}(q',\theta')$ なる規則は含まない．一般性を失うことなく，ε-規則において $\theta=\varepsilon$ とおける．更に，dpda $M=(Q,\Gamma,\Sigma,\delta,q_0,Z_0,F)$ を，dpdt T の随伴 dpda と呼ぶ．ここで，δ は次のような推移規則の集合である．

$$\delta = \{(p,A)\xrightarrow{a}(q,\theta) \mid (p,A)\xrightarrow{a/z}(q,\theta) \in \mu\}.$$

なお，推移規則に ε-規則を一切含まない場合，その dpda, dpdt は実時間であるという．

定義 2.2 (文献 [12], p.1189, 定義 2.2 参照)　ある dpda $M=(Q,\Gamma,\Sigma,\delta,q_0,Z_0,F)$ について，$\Gamma=\{Z_0\}$ である場合，dpda M を決定性限定 1 カウンタオートマトン (deterministic restricted one-counter automaton; droca) と呼ぶ．同様に，ある dpdt $T=(Q,\Gamma,\Sigma,\Delta,\mu,q_0,Z_0,F)$ について，$\Gamma=\{Z_0\}$ である場合，dpdt T を決定性限定 1 カウンタ変換器 (deterministic restricted one-counter transducer; droct) と呼ぶ．また，上記のように，droct T の出力機構を取り除いた droca が M となる場合，M を T の随伴 droca と呼ぶ．

定義 2.3 (文献 [11], pp.2676-2677, 定義 2.2，文献 [12], pp.1189-1190, 定義 2.3 参照)　dpdt T の計算状況を $(p,\alpha) \in Q \times \Gamma^*$ と表記する．ここで，記号列 α の左端をスタックの先頭とする．また，$\alpha = A\alpha'', A \in \Gamma$ としたとき，計算状況 $(p,A\alpha'')$ に，ある推移規則 $(p,A)\xrightarrow{a/z}(q,\theta) \in \mu$ が適用されて dpdt T が 1 ステップ推移する状況を次のように表記する．

$$(p,A\alpha'')\xrightarrow[T]{a/z}(q,\theta\alpha'').$$

同じく，その随伴 dpda に関して次のように表記する．

$$(p,A\alpha'')\xrightarrow[M]{a}(q,\theta\alpha'').$$

次に，ある $p_i \in Q$, $\alpha_i \in \Gamma^+$, $a_i \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $z_i \in \Delta^*$, $1 \le i \le m$, $p_{m+1} \in Q$, $\alpha_{m+1} \in \Gamma^*$ に対して，次のような 1 ステップ推移が m 回連続する系列を考える．

$$(p_1,\alpha_1)\xrightarrow[T]{a_1/z_1}(p_2,\alpha_2),\ (p_2,\alpha_2)\xrightarrow[T]{a_2/z_2}(p_3,\alpha_3),$$

$$\ldots,\ (p_m,\alpha_m)\xrightarrow[T]{a_m/z_m}(p_{m+1},\alpha_{m+1}).$$

この状況を次のように表記する．

$$(p_1,\alpha_1)\overset{x/z}{\underset{T}{\Longrightarrow}}{}^{(m)}\ (p_{m+1},\alpha_{m+1})$$

ただし，$x=a_1a_2\ldots a_m$, $z=z_1z_2\ldots z_m$.

なお，便宜上，$m=0$ の場合を次のように定める．

$$(p_1,\alpha_1)\overset{\varepsilon/\varepsilon}{\underset{T}{\Longrightarrow}}{}^{(0)}\ (p_1,\alpha_1).$$

同様に，dpdt T の随伴 dpda M に関して次のように表記する．

$$(p_1,\alpha_1)\overset{x}{\underset{M}{\Longrightarrow}}{}^{(m)}\ (p_{m+1},\alpha_{m+1}).$$

更に，ある $\alpha'' \in \Gamma^*$ が存在して，各ステップにおいて，$\alpha_i = \alpha_i'\alpha''$, $\alpha_i' \in \Gamma^+$, $1 \le i \le m+1$ である場合，$| \notin \Gamma$ なる記号を用いて，次のように表記する．

$$(p_1,\alpha_1' \mid \alpha'')\overset{x/z}{\underset{T}{\Longrightarrow}}{}^{(m)}\ (p_{m+1},\alpha_{m+1}' \mid \alpha'').$$

同様に，T の随伴 dpda M に関して次のように表記する．

$$(p_1,\alpha_1' \mid \alpha'')\overset{x}{\underset{M}{\Longrightarrow}}{}^{(m)}\ (p_{m+1},\alpha_{m+1}' \mid \alpha'').$$

なお，上記の各 “(m)” は省略することもある．

定義 2.4 (文献 [11], p.2677, 定義 2.4，文献 [12], p.1190, 定義 2.4 参照)　出力記号列 $w,h,t \in \Delta^*$ について，$w=ht$ である場合，$h^{-1}w=t$，あるいは，$wt^{-1}=h$ とも表記する．また，出力記号集合 Δ に関して，Δ^{-*} および $\Delta^{\pm *}$ を次のような集合と定義する．$\Delta^{-*}=\{h^{-1} \mid h \in \Delta^*\}$，$\Delta^{\pm *}=\Delta^* \cup \Delta^{-*}$．なお，$\Delta^{-*}-\{\varepsilon\}$ を，Δ^{-+} と表記する．更に，改めて，$h \in \Delta^{\pm *}$，および，$k^{-1} \in \Delta^{-*}$, $k \in \Delta^*$ として，以下のような記号列長を定義する．$h \in \Delta^*$ のとき，$||h||=|h|$, $h=k^{-1} \in \Delta^{-*}$ のとき，$||h||=|k|$．$|k^{-1}|=-|k|$.

定義 2.5 (文献 [11], p.2677, 定義 2.5，文献 [12], p.1190, 定義 2.5 参照)　実時間最終状態受理式 dpdt T の計算状況 $(p,\alpha) \in Q \times \Gamma^*$ に対して以下を定義する．なお，T の随伴 dpda を M とする．

$$N(p,\alpha)=\{x \in \Sigma^* \mid (p,\alpha)\overset{x}{\underset{M}{\Longrightarrow}}(q,\varepsilon) \text{ for some } q \in Q\}.$$

$$L(p,\alpha)=\{x \in \Sigma^* \mid (p,\alpha)\overset{x}{\underset{M}{\Longrightarrow}}(q,\beta) \text{ for some } q \in F,\ \beta \in \Gamma^*\}.$$

$$\mathrm{TRANS}(p,\alpha)=\{x/y\in\Sigma^*\times\Delta^*\mid (p,\alpha)\overset{x/y}{\underset{T}{\Longrightarrow}}(q,\beta)\text{ for some }q\in F,\beta\in\Gamma^*\}.$$

ここで，特に，$N(M)=N(q_0,Z_0)$，$L(M)=L(q_0,Z_0)$，$\mathrm{TRANS}(T)=\mathrm{TRANS}(q_0,Z_0)$ と定義する．

$$\mathrm{FIRST}(p,\alpha)=\{a\in\Sigma\mid (p,A)\overset{a}{\longrightarrow}(q,\theta)\in\delta,\ \alpha=A\alpha'',\ A\in\Gamma,\ \alpha''\in\Gamma^*,\text{ for some } q\in Q,\theta\in\Gamma^*\}$$

$$\mathrm{FIRST}_{live}(p,\alpha)=\begin{cases}(p\notin F\text{ のとき})：\\ \{a\in\mathrm{FIRST}(p,\alpha)\mid (p,\alpha)\overset{a}{\underset{M}{\Longrightarrow}}(q,\beta),\\ \quad L(q,\beta)\neq\emptyset,\text{ for some } q\in Q,\ \beta\in\Gamma^*\},\\ (p\in F\text{ のとき})：\\ \{a\in\mathrm{FIRST}(p,\alpha)\mid (p,\alpha)\overset{a}{\underset{M}{\Longrightarrow}}(q,\beta),\\ \quad L(q,\beta)\neq\emptyset,\text{ for some } q\in Q,\ \beta\in\Gamma^*\}\\ \cup\{\varepsilon\}.\end{cases}$$

定義 2.6 (文献 [11], p.2678, 定義 2.6，文献 [12], pp.1190-1191, 定義 2.6 参照)　実時間最終状態受理式 dpdt T_1, T_2 の計算状況を，各々(p,α)，$(\bar{p},\beta)$ とする．また，その随伴 dpda を M_1, M_2 とする．ここで，$L(p,\alpha)=L(\bar{p},\beta)$ であることを，$(p,\alpha)\equiv(\bar{p},\beta)$ なる等価式で表記する．また，$L(M_1)=L(M_2)$ であるとき，両 dpda は等価であるといい，$M_1\equiv M_2$ と表記する．さもなくば，非等価であるといい，$M_1\not\equiv M_2$ と表記する．更に，$h\in\Delta^{\pm *}$ に対して，

$$\mathrm{TRANS}(p,\alpha)=h\ \mathrm{TRANS}(\bar{p},\beta)=\{x/hv\mid x/v\in\mathrm{TRANS}(\bar{p},\beta)\}$$

であることを，$(p,\alpha)\equiv h(\bar{p},\beta)$ なる等価式で表記する．ここで，ある $k\in\Delta^*$ について $h=k^{-1}$ である場合，この等価式は $k(p,\alpha)\equiv(\bar{p},\beta)$ とも表記する．また，$\mathrm{TRANS}(T_1)=\mathrm{TRANS}(T_2)$ であるとき，両 dpdt は等価であるといい，$T_1\equiv T_2$ と表記する．さもなくば，非等価であるといい，$T_1\not\equiv T_2$ と表記する．

3　前提および基本命題

補題 3.1　実時間最終状態受理式 droct $T=(Q,\Gamma,\Sigma,\Delta,\mu,q_0,Z_0,F)$ の計算状況 $(p,\alpha)\in Q\times\Gamma^*$ について，次の (1)〜(3) が成立する．

(1) $|\alpha|\geq|Q|$ かつ $N(p,\alpha)\neq\emptyset$ ならば，任意の $\beta\in\Gamma^*$ に対して $N(p,\beta)\neq\emptyset$.

(2) 任意の $\beta\in\Gamma^*$ に対して，次の (i), (ii) が成立する．

(i) $L(p,\alpha)\subseteq L(p,\alpha\beta)$,

(ii) $\mathrm{TRANS}(p,\alpha)\subseteq\mathrm{TRANS}(p,\alpha\beta)$.

(3) $N(p,\alpha)=\emptyset$ ならば，任意の $\beta\in\Gamma^*$ に対して，次の (i)〜(iii) が成立する．

(i) $N(p,\alpha\beta)=\emptyset$,

(ii) $L(p,\alpha)=L(p,\alpha\beta)$,

(iii) $\mathrm{TRANS}(p,\alpha)=\mathrm{TRANS}(p,\alpha\beta)$.

(証明)　(1) については，文献 [6]，Lemma 3.1 参照．(2), (3) については，定義 2.5 から得られる．□

上記の補題 3.1 (1), (3)(i) より，$|\alpha'|\leq|Q|$ なる，T の各計算状況 $(p,\alpha')\in Q\times\Gamma^*$ についてだけ，$N(p,\alpha')\neq\emptyset$ か否かをあらかじめ調べておけば，T の任意の計算状況 $(p,\alpha)\in Q\times\Gamma^*$ について，$N(p,\alpha)\neq\emptyset$ か否かは直ちに判定できる．このような手続きは，T の記述長に関する多項式オーダの時間で行える．

補題 3.2　実時間最終状態受理式 droct $T=(Q,\Gamma,\Sigma,\Delta,\mu,q_0,Z_0,F)$ の計算状況 $(p,\alpha)\in Q\times\Gamma^*$ について，ある $x\in\Sigma^*, z\in\Delta^*, q\in Q, \beta\in\Gamma^*$ に対して，

$$(p,\alpha)\overset{x/z}{\underset{T}{\Longrightarrow}}(q,\beta)\tag{3.1}$$

なる推移が存在するならば，ある $x'\in\Sigma^*, z'\in\Delta^*, \beta'\in\Gamma^*$ に対して，$n\leq|Q|\,(|Q|-1)$ を満たす，

$$(p,\alpha)\overset{x'/z'}{\underset{T}{\Longrightarrow}}{}^{(n)}\ (q,\beta')$$

なる推移が存在する．

(証明)　文献 [7]，Lemma 3.1 の証明と同様にして得られる．□

上記の補題 3.2 より，(3.1) の推移が存在するならば，任意の $q\in F$ に対し，$|x'|\leq|Q|\,(|Q|-1)$ を満たす，$(p,\alpha)\overset{x'/z'}{\underset{T}{\Longrightarrow}}(q,\beta')$ $(x'\in\Sigma^*, z'\in\Delta^*, \beta'\in\Gamma^*)$ なる推移が存在する．従って，計算状況 (p,α) から長さ $|Q|\,(|Q|-1)$ 以下の入力記号列により，最終状態をもつ計算状況へ推移するか否かを調べれば，$L(p,\alpha)\neq\emptyset$ か否かを判定できる．また，この手続きが T の記述長に関する多項式オーダの時間で行えることは，明らかである．

さて，等価性判定の対象とする実時間最終状態受理式 droct 対を，$T_1=(Q_1,\Gamma_1,\Sigma,\Delta,\mu_1,q_{01},Z_{01},F_1)$，$T_2=(Q_2,\Gamma_2,\Sigma,\Delta,\mu_2,q_{02},Z_{02},F_2)$ とし，各々から出力機構を取り除いた droca (随伴 droca) を M_1, M_2 とする．

なお，文献 [7] において，任意の実時間最終状態受理式 droca 同士の包含性判定を多項式時間で解決する

アルゴリズムを得ており，これらの droca 対の等価性判定自体は多項式時間内で判定できる．本稿では，上記 droct 対 T_1, T_2 の随伴 droca 対 M_1, M_2 に対して事前に等価性判定を行うことなく，droct 対 T_1, T_2 に対して直接，等価性判定を多項式時間内に行うことを考える．なお，以下では，スタック記号 $A \in \Gamma_i\,(i=1,2)$ を頻繁に使用するが，T_1 および T_2 のスタック記号はそれぞれ 1 種類であり，$Z_{0i} = A\,(i=1,2)$ であることに留意されたい．

命題 3.1　$T_1 \equiv T_2$ であるとき，次の (i), (ii) が成立する．
(i) ある $w \in \Sigma^*$, $w_1, w_2 \in \Delta^*$, $p \in Q_1$, $\bar{p} \in Q_2$, $\alpha \in \Gamma_1^*$, $\beta \in \Gamma_2^*$ に対して，

$$(q_{01}, Z_{01}) \xRightarrow[T_1]{w/w_1} (p, \alpha) \tag{3.2}$$

$$(q_{02}, Z_{02}) \xRightarrow[T_2]{w/w_2} (\bar{p}, \beta) \tag{3.3}$$

であり，更に，$L(p,\alpha) \neq \emptyset$ かつ $L(\bar{p},\beta) \neq \emptyset$ であるとき，$w_1 h = w_2$ なる，ある $h \in \Delta^{\pm *}$ が存在し，

$$(p, \alpha) \equiv h(\bar{p}, \beta). \tag{3.4}$$

が成立する．
(ii) 更に，ある $w' \in \Sigma^*$, $w_1', w_2' \in \Delta^*$, $\alpha' \in \Gamma_1^*$, $\beta' \in \Gamma_2^*$ に対して，

$$(q_{01}, Z_{01}) \xRightarrow[T_1]{w'/w_1'} (p, \alpha')$$

$$(q_{02}, Z_{02}) \xRightarrow[T_2]{w'/w_2'} (\bar{p}, \beta')$$

であり，$L(p,\alpha') \neq \emptyset$ かつ $L(\bar{p},\beta') \neq \emptyset$ ならば，$w_1' h' = w_2'$ なる，ある $h' \in \Delta^{\pm *}$ が存在し，かつ，$h = h'$ が成立する．
(証明)　まず，(i) について考える．式 (3.4) が不成立ならば，定義 2.6 から，直ちに $T_1 \not\equiv T_2$ となる．従って，その対偶として式 (3.4) の成立が保証される．(ii) については，$(p,\alpha') \equiv h'(\bar{p},\beta')$ が同様に成立するため，定義 2.5，補題 3.1 (2) から，$h = h'$ が得られる．□

定義 3.1　T_1, T_2 に依存する各種定数を定義する．

$$\tau_i = \mathrm{Max}\{|z| \mid (p, A) \xrightarrow{a/z} (q, \theta) \in \mu_i\},\ (i=1,2)$$

$$\rho_i = \mathrm{Max}\{|\theta| \mid (p, A) \xrightarrow{a/z} (q, \theta) \in \mu_i\},\ (i=1,2)$$

これらの定数より，$\tau = \mathrm{Max}\{\tau_1, \tau_2\}$, $\rho = \mathrm{Max}\{\rho_1, \rho_2\}$ と定義する．

また，$N(p,A) \neq \emptyset$ なる，ある $(p,A) \in Q_i \times \Gamma_i\,(i=1,2)$ に対して，以下の定数 $k_i(p,A)$ を定義する．

$$k_i(p,A) = \mathrm{Max}\{\,\mathrm{Min}\{|w| \mid (p,A) \xRightarrow[M_i]{w} (q,\varepsilon),\ w \in \Sigma^*\} \mid q \in Q_i\}.$$

更に，droca $M_i\,(i=1,2)$ に依存する，定数 k_i を定義する．

$$k_i = \mathrm{Max}\{k_i(p,A) \mid N(p,A) \neq \emptyset,\ p \in Q_i,\ A \in \Gamma_i\}.$$

なお，$\rho \leq 1$ である場合は，その多項式時間等価性判定の可解性は自明である．従って，以降では，$\rho \geq 2$ を前提とする．

補題 3.3　$T_1 \equiv T_2$ であるとき，ある $x_0 \in \Sigma^*$, $x \in \Sigma^+$, $u_0, u, v_0, v \in \Delta^*$, $p \in Q_1$, $\bar{p} \in Q_2$, $\alpha \in \Gamma_1^+$, $\alpha' \in \Gamma_1^*$, $\beta \in \Gamma_2^+$, $\beta' \in \Gamma_2^*$ に対して，

$$(q_{01}, Z_{01}) \xRightarrow[T_1]{x_0/u_0} (p, \alpha) \xRightarrow[T_1]{x/u} (p, \alpha')$$

$$(q_{02}, Z_{02}) \xRightarrow[T_2]{x_0/v_0} (\bar{p}, \beta) \xRightarrow[T_2]{x/v} (\bar{p}, \beta')$$

であるとする．ここで，$N(p,\alpha) \neq \emptyset$ のとき，次の (i), (ii) が成立する．
(i) $|Q_1| \leq |\alpha| \leq |\alpha'|$ ならば，$|\beta| \leq |\beta'|$.
(ii) $|\beta| < |\beta'|$ ならば，$|\alpha| \leq |\alpha'|$.
また，$N(\bar{p},\beta) \neq \emptyset$ のとき，次の (iii), (iv) が成立する．
(iii) $|Q_2| \leq |\beta| \leq |\beta'|$ ならば，$|\alpha| \leq |\alpha'|$.
(iv) $|\alpha| < |\alpha'|$ ならば，$|\beta| \leq |\beta'|$.
(証明)　$T_1 \equiv T_2$ なる前提を考慮すれば，文献 [6], Lemma 3.2 の証明と同様にして得られる．□

補題 3.4　$T_1 \equiv T_2$ であるとき，ある $x \in \Sigma^*$, $u, v \in \Delta^*$, $p \in Q_1$, $\bar{p} \in Q_2$, $\alpha \in \Gamma_1^*$, $\beta \in \Gamma_2^*$ に対して，

$$(q_{01}, Z_{01}) \xRightarrow[T_1]{x/u} (p, \alpha)$$

$$(q_{02}, Z_{02}) \xRightarrow[T_2]{x/v} (\bar{p}, \beta)$$

であるとする．このとき，

$$\mathrm{FIRST}_{live}(p,\alpha) = \mathrm{FIRST}_{live}(\bar{p},\beta)$$

が成立する．
(証明)　$T_1 \equiv T_2$ なる前提を考慮すれば，文献 [6], Lemma 3.3 の証明と同様にして得られる．□

4 等価性判定アルゴリズム

等価性の判定は，文献 [2] 等のアルゴリズムと同様に，実時間最終状態受理式 droct 対 T_1, T_2 の初期計算状況に対する等価式 $(q_{01}, Z_{01}) \equiv (q_{02}, Z_{02})$ を唯一の節点 (根) とする判定木から，後述の **“分岐”**，**“跳越し”**，**“スタック縮減”** の各操作により，逐次その子節点を導入することによって判定木の展開を行なう．ここで，判定木中の節点は，*unchecked*，*checked*，*skipping*，*s-checked* の 4 つの状態 (status) をとる．そして，*unchecked* 状態，あるいは *skipping* 状態の節点が存在する間は，*unchecked* 状態の節点があれば，その中でサイズの最も小さいものに，さもなければ，*skipping* 状態の節点の中でサイズの最も小さいものに，順次着目する．節点のサイズとは，節点 $(p,\alpha) \equiv h(\bar{p},\beta)$ の場合，$(\mathrm{Max}\{|\alpha|, |\beta|\}, \mathrm{Min}\{|\alpha|, |\beta|\})$ なる数値対で定義し，その大小関係は，まず 1 つめ（左側）の数値の大小関係とし，これが等しい場合は，2 つめ（右側）の数値の大小関係で決定するものとする．

さて，推移 (3.2), (3.3) に対応して，節点 (3.4) が判定木中に導入され，その成立性が着目されたとする．ここで，$p \in F_1$ かつ $\bar{p} \in F_2$ である場合，$T_1 \equiv T_2$ であるためには，定義 2.5, 2.6 より，$h = \varepsilon$ でなければならない．このチェックを **“終端チェック”** と呼ぶ．また，判定木中に $(p, \alpha') \equiv h'(\bar{p}, \beta')$ なる節点が既に存在している場合，$T_1 \equiv T_2$ であるためには，命題 3.1 より，$h = h'$ でなければならない．このチェックを出力の **“一意性チェック”** と呼ぶ．このいずれかのチェックが不成立である場合，直ちに “$T_1 \not\equiv T_2$” と判定を下し，全手続きを終了する．着目節点 (3.4) が，この両チェックの対象外である場合に，後述する “分岐”，“跳越し”，“スタック縮減” の各操作の適用を検討する．なお，着目節点 (3.4) に対する終端チェックが成立し，かつ $\mathrm{FIRST}_{live}(p,\alpha) = \mathrm{FIRST}_{live}(\bar{p},\beta) = \{\varepsilon\}$ である場合，または，節点 (3.4) と同じラベルの *unchecked* 状態ではない節点が判定木中に既に存在している場合，節点 (3.4) の状態を *checked* にする．

なお，式 (3.4) のような節点を判定木中に導入する時点で，まずは後述の **“基礎チェック”** の成立性を調べる．ある節点に対する基礎チェックが不成立である場合，補題 3.3, 3.4 より $T_1 \not\equiv T_2$ が成立するため，直ちに “$T_1 \not\equiv T_2$” と判定を下し，全手続きを終了する．

以上の手順において，途中で “$T_1 \not\equiv T_2$” と判定されることなく，*unchecked* 節点も *skipping* 節点も存在しなくなった場合，“$T_1 \equiv T_2$” との判定を下す．

定義 4.1 (文献 [11], pp.2683-2684, 定義 4.1，文献 [12], p.1195, 定義 4.1 参照)　現時点までに展開された判定木を $T(T_1 : T_2)$ で表す．$T(T_1 : T_2)$ 中に 2 節点 $(p_1, \alpha_1\gamma_1) \equiv h_1(\bar{p}_1, \bar{\alpha}_1\bar{\gamma}_1)$，$(p_2, \alpha_2\gamma_1) \equiv h_2(\bar{p}_2, \bar{\alpha}_2\bar{\gamma}_1)$ が存在し，

$$(p_1, \alpha_1) \underset{T_1}{\overset{x_1/u_1}{\Longrightarrow}} (p_2, \alpha_1') \quad \text{かつ},$$

$$(\bar{p}_1, \bar{\alpha}_1) \underset{T_2}{\overset{x_1/v_1}{\Longrightarrow}} (\bar{p}_2, \bar{\alpha}_1')$$

ただし，$x_1 \in \Sigma^*$，$u_1, v_1 \in \Delta^*$，$u_1 h_2 = h_1 v_1$，$|\alpha_1'| \geq |\alpha_2|$，$|\bar{\alpha}_1'| \geq |\bar{\alpha}_2|$

のような推移対に対応して，この両節点が，“$u_1 \backslash x_1 / v_1$” をラベルとする枝で結ばれた親子関係にある場合，次のように記述する．

$$< (p_1, \alpha_1 \mid \gamma_1) \equiv h_1(\bar{p}_1, \bar{\alpha}_1 \mid \bar{\gamma}_1) > \xrightarrow[T(T_1:T_2)]{u_1 \backslash x_1 / v_1} < (p_2, \alpha_2 \mid \gamma_1) \equiv h_2(\bar{p}_2, \bar{\alpha}_2 \mid \bar{\gamma}_1) > .$$

更に，このような親子関係が，

$$< (p_i, \alpha_i \mid \gamma_1) \equiv h_i(\bar{p}_i, \bar{\alpha}_i \mid \bar{\gamma}_1) > \xrightarrow[T(T_1:T_2)]{u_i \backslash x_i / v_i} < (p_{i+1}, \alpha_{i+1} \mid \gamma_1) \equiv h_{i+1}(\bar{p}_{i+1}, \bar{\alpha}_{i+1} \mid \bar{\gamma}_1) >$$

ただし，$u_i h_{i+1} = h_i v_i$，$(1 \leq i \leq m)$

のように連続する場合，次のように記述する．

$$< (p_1, \alpha_1 \mid \gamma_1) \equiv h_1(\bar{p}_1, \bar{\alpha}_1 \mid \bar{\gamma}_1) > \underset{T(T_1:T_2)}{\overset{u \backslash x / v}{\Longrightarrow}} < (p_{m+1}, \alpha_{m+1} \mid \gamma_1) \equiv h_{m+1}(\bar{p}_{m+1}, \bar{\alpha}_{m+1} \mid \bar{\gamma}_1) >$$

ただし，$x = x_1 x_2 \ldots x_m$，$u = u_1 u_2 \ldots u_m$，$v = v_1 v_2 \ldots v_m$.

これを，$T(T_1 : T_2)$ 中の $x \in \Sigma^*$ による推移路と呼ぶ．なお，上記の各 “$\mid$” は省略することもある．

4.1 基礎チェック

定義 4.2　現時点までに展開された判定木を $T(T_1 : T_2)$ で表す．$T(T_1 : T_2)$ 中の節点 $(p,\alpha) \equiv h(\bar{p},\beta)$ について，次の条件 (i), (ii) が成立するか否か調べる操作を**基礎チェック**と呼ぶ．

(i) $\mathrm{FIRST}_{live}(p,\alpha) = \mathrm{FIRST}_{live}(\bar{p},\beta)$.

(ii) $N(p,\alpha) \neq \emptyset$ または $N(\bar{p},\beta) \neq \emptyset$ の場合，ある

$x', x'' \in \Sigma^+$, $u', u'', v', v'' \in \Delta^*$, $\alpha' \in \Gamma_1^+$, $\beta' \in \Gamma_2^+$ に対して,

$$< (q_{01}, Z_{01}) \equiv (q_{02}, Z_{02}) > \xRightarrow[T(T_1:T_2)]{u'\backslash x'/v'} < (p, \alpha') \equiv h(\bar{p}, \beta') > \xRightarrow[T(T_1:T_2)]{u''\backslash x''/v''} < (p, \alpha) \equiv h(\bar{p}, \beta) >$$

なる推移路が存在するならば, 次の (a), (b) が成立する.

(a) $N(p, \alpha') \neq \emptyset$ のとき,
- $|Q_1| \leq |\alpha'| \leq |\alpha|$ ならば, $|\beta'| \leq |\beta|$.
- $|\beta'| < |\beta|$ ならば, $|\alpha'| \leq |\alpha|$.

(b) $N(\bar{p}, \beta') \neq \emptyset$ のとき,
- $|Q_2| \leq |\beta'| \leq |\beta|$ ならば, $|\alpha'| \leq |\alpha|$.
- $|\alpha'| < |\alpha|$ ならば, $|\beta'| \leq |\beta|$.

4.2 スタック縮減

節点 $(p, \alpha) \equiv h(\bar{p}, \beta)$ に対して, $N(p, \alpha) = \emptyset$ であるとき, 補題 3.1 より, $1 \leq |\alpha'| \leq |Q_1|$ かつ $N(p, \alpha') = \emptyset$ なる $\alpha' \in \Gamma_1^+$ が存在し, $\mathrm{TRANS}(p, \alpha') = \mathrm{TRANS}(p, \alpha)$ が成立する. 同様に, $N(\bar{p}, \beta) = \emptyset$ であるとき, $1 \leq |\beta'| \leq |Q_2|$ かつ $N(\bar{p}, \beta') = \emptyset$ なる $\beta' \in \Gamma_2^+$ が存在し, $\mathrm{TRANS}(\bar{p}, \beta') = \mathrm{TRANS}(\bar{p}, \beta)$ が成立する.

後述する分岐操作と跳越し操作だけでは, 判定木が無限に展開して終端しない場合がある. そこで, 上記のような場合には, 次のスタック縮減操作を適用する.

定義 4.3 現時点までに展開された判定木を $T(T_1 : T_2)$ で表す. $T(T_1 : T_2)$ 中の着目節点 $(p, \alpha) \equiv h(\bar{p}, \beta)$ に対して, まず, 次の (i), (ii) を行う.
(i) $N(p, \alpha) = \emptyset$ の場合, $N(p, \alpha') = \emptyset$ なる, 最短の $\alpha' \in \Gamma_1^+$ を α_0 とする. さもなければ, $\alpha_0 = \alpha$ とする.
(ii) $N(\bar{p}, \beta) = \emptyset$ の場合, $N(\bar{p}, \beta') = \emptyset$ なる, 最短の $\beta' \in \Gamma_2^+$ を β_0 とする. さもなければ, $\beta_0 = \beta$ とする.
ここで, $|\alpha_0| < |\alpha|$ または $|\beta_0| < |\beta|$ が成立する場合, 節点 $(p, \alpha) \equiv h(\bar{p}, \beta)$ に対してスタック縮減操作が適用可能であるという. このとき, 等価式 $(p, \alpha_0) \equiv h(\bar{p}, \beta_0)$ を着目節点の子節点として加え, 着目節点の状態を *checked* にする. また, これら節点間の枝ラベルを “$\varepsilon\backslash\varepsilon(\lambda)/\varepsilon$”, $(\lambda \notin \Sigma)$ とする. この操作を**スタック縮減**と呼ぶ. なお, 枝ラベル中の “$\varepsilon(\lambda)$” は, ε-推移ではないことを明示するために便宜上使用しているだけであり, 混乱のない限り, 単に “ε” と表記する.

4.3 分岐

本アルゴリズムでは, 判定木中に節点が導入された時点で **4.1** の基礎チェックを行っているため, 着目節点 (3.4) に対して, $\mathrm{FIRST}_{live}(p, \alpha) = \mathrm{FIRST}_{live}(\bar{p}, \beta)$ が成立している.

補題 4.1 (文献 [11], p.2683, 補題 4.1, 文献 [12], pp.1194-1195, 補題 4.1 参照) 判定対象の droct T_1, T_2 のある計算状況対 $(p, \alpha) \in Q_1 \times \Gamma_1^+$, $(\bar{p}, \beta) \in Q_2 \times \Gamma_2^+$ に対して, 等価式 (3.4) が成立することと, 次の (i), (ii) が成立することは同値である.

(i) 全ての $a_i \in \mathrm{FIRST}_{live}(p, \alpha) = \mathrm{FIRST}_{live}(\bar{p}, \beta) = \{a_1, a_2, ..., a_l\} \subseteq \Sigma$ における推移対,

$$(p, \alpha) \xrightarrow[T_1]{a_i/u_i} (p_i, \alpha_i) \quad \text{かつ} \quad (\bar{p}, \beta) \xrightarrow[T_2]{a_i/v_i} (\bar{p}_i, \beta_i)$$

に対して, ある適当な $h_i \in \Delta^{\pm *}$ が存在して, $u_i h_i = h v_i$ が成立する.

(ii) 上記 (i) の場合に対して, 以下が成立する.

$$(p_i, \alpha_i) \equiv h_i(\bar{p}_i, \beta_i), \ 1 \leq i \leq l. \tag{4.1}$$

(証明) 文献 [11], 補題 4.1 および [12], 補題 4.1 の証明と同様にして得られる. □

上記の補題 4.1 (i) の成立性チェックを, “**分岐出力チェック**” と呼び, チェック成功であるとき, 全ての i に対する等価式 (4.1) を節点 (3.4) の子節点として加え, 着目節点の状態を *checked* にする. このとき, 各々の枝のラベルを “$u_i\backslash a_i/v_i$” とする. この操作を**分岐**と呼ぶ. なお, 分岐出力チェックが不成功のとき, “$T_1 \not\equiv T_2$” と判定を下し, 全手続きを終了する.

着目節点 (3.4) に分岐が適用されたとき, その子節点の個数は高々 $|\Sigma|$ である.

4.4 跳越し

上記の分岐操作とスタック縮減操作だけでは, 判定木が無限に展開して終端しない場合がある. そこで, 文献 [3] 等と同様に跳越しを導入する. なお, 以降, 現時点までに展開された判定木を $T(T_1 : T_2)$ で表すこととする.

定義 4.4 (跳越しの前提条件 : 文献 [11], p.2684, 定義 4.2, 文献 [12], p.1195, 定義 4.2 参照) 着目節点 (3.4) が次のように書き表せるとする.

$$(p, \omega_1\alpha'') \equiv h(\bar{p}, \omega_2\beta''). \tag{4.2}$$

ただし，$\alpha = \omega_1\alpha''$, $\beta = \omega_2\beta''$ であり，かつ，$\alpha'' \neq \varepsilon$ または $\beta'' \neq \varepsilon$．更に，$T(T_1 : T_2)$ 中に既に分岐が適用された，

$$(p, \omega_1) \equiv h(\bar{p}, \omega_2) \quad (\omega_1 \in \Gamma_1^+, \omega_2 \in \Gamma_2^+) \tag{4.3}$$

なる節点が存在し，

$$N(p, \omega_1) \neq \emptyset \quad \text{かつ} \quad |\omega_1| \geq |Q_1| \tag{4.4}$$

$$N(\bar{p}, \omega_2) \neq \emptyset \quad \text{かつ} \quad |\omega_2| \geq |Q_2| \tag{4.5}$$

であるとき，着目節点 (3.4) は跳越しの前提条件を満足しているという．ここで，(4.4) および (4.5) の条件を満足する，サイズの最も小さい節点 (4.3) を，この跳越しの "**対応節点**" と呼ぶ．

定義 4.5 (跳越し適用の可否：文献 [11], p.2684, 定義 4.3，文献 [12], pp.1195-1196, 定義 4.3 参照)　着目節点 (3.4) が跳越しの前提条件を満足しており，更に，ある $x_0 \in \Sigma^+, u_0, v_0 \in \Delta^*, q \in F_1, \bar{q} \in F_2, \gamma_{01} \in \Gamma_1^*, \gamma_{02} \in \Gamma_2^*$ に対して，対応節点 (4.3) から，次の推移路が存在するとする．

$$< (p, \omega_1) \equiv h(\bar{p}, \omega_2) > \xRightarrow[T(T_1:T_2)]{u_0\backslash x_0/v_0} \tag{4.6}$$

$$< (q, \gamma_{01}) \equiv (\bar{q}, \gamma_{02}) >$$

ただし，$u_0 = hv_0$ かつ，$\gamma_{01} = \varepsilon$，または $\gamma_{02} = \varepsilon$，または $1 \leq |\gamma_{01}| \leq |Q_1|$ かつ $1 \leq |\gamma_{02}| \leq |Q_2|$．

このとき，上記推移路 (4.6) に対応した，着目節点 (3.4) の両辺の計算状況を起点とする，次の対となる推移

$$(p, \omega_1\alpha'') \xRightarrow[T_1]{x_0/u_0} (q, \gamma_1\alpha'') \tag{4.7}$$

$$(\bar{p}, \omega_2\beta'') \xRightarrow[T_2]{x_0/v_0} (\bar{q}, \gamma_2\beta'')$$

ただし，$|\gamma_1| \geq |\gamma_{01}|$ かつ $|\gamma_2| \geq |\gamma_{02}|$

が可能である．従って，対応節点 (4.3) から，(4.6) のような推移路が存在するとき，着目節点 (3.4) に対する跳越しが適用可能であるという．

着目節点 (3.4) が跳越しの前提条件 (定義 4.4) を満足し，更に，跳越しが適用可能 (定義 4.5) である場合，着目節点に対して**跳越し**を適用し，その子節点（これを "**後続節点**" と呼ぶ）として，

$$(q, \gamma_{01}\alpha'') \equiv (\bar{q}, \gamma_{02}\beta'') \tag{4.8}$$

を $T(T_1 : T_2)$ に取り入れ，そこへ至る枝のラベルを "$u_0\backslash x_0/v_0$" とする．ただし，x_0 は (4.6) のような推移路の中で最も短い入力記号列とする．同様に，この時点の $T(T_1 : T_2)$ において可能な限り後続節点の追加を行い，着目節点の状態を *skipping* にする．その後，節点 (3.4) に再度着目して跳越しを適用しても，新たな後続節点が追加されず，かつ，後続節点との間の枝ラベルの更新も行われなかった場合，着目節点の状態を *s-checked* にする．また，以後判定木が変化する度に，全ての *s-checked* 節点の状態を *skipping* に戻して跳越しの適用可能性を常に監視し，必要に応じて後続節点の追加を行う．

着目節点 (3.4) に跳越しが適用されたとき，その子節点 (後続節点) の個数は高々$|Q_1||Q_2|$ である．

4.5　等価性判定アルゴリズム

対象とする droct 対の等価性判定アルゴリズムの全手続きを以下に示す．

Algorithm

あらかじめ，$1 \leq |\alpha| \leq |Q_1|$ なる各計算状況 $(p, \alpha) \in Q_1 \times \Gamma_1^+$ に対して $N(p, \alpha) \neq \emptyset$ か否かを求める．同様に，$1 \leq |\beta| \leq |Q_2|$ なる各計算状況 $(\bar{p}, \beta) \in Q_2 \times \Gamma_2^+$ に対して $N(\bar{p}, \beta) \neq \emptyset$ か否かを求める．

判定木は，ラベルを $(q_{01}, Z_{01}) \equiv (q_{02}, Z_{02})$ とする，*unchecked* 状態にある根だけから成るものとする．

if　$L(q_{01}, Z_{01}) = L(q_{02}, Z_{02}) = \emptyset$
then　根の状態を *checked* にする
else if　根に対する基礎チェックが失敗する
　then　"$T_1 \not\equiv T_2$" と判定を下す；**halt**　**fi**　**fi**
while　判定木中に *unchecked* または *skipping* 状態の
　　節点が存在する　**do**
　if　判定木中に *unchecked* 状態の節点が存在する
　then　着目節点 P を，*unchecked* 状態にある，最
　　　もサイズの小さい節点とする
　else　着目節点 P を，*skipping* 状態にある，最もサ
　　　イズの小さい節点とする　**fi**
　P のラベルを $(p, \alpha) \equiv h(\bar{p}, \beta)$ とする；
　if　$p \in F_1$ かつ $\bar{p} \notin F_2$，または，$p \notin F_1$ かつ $\bar{p} \in F_2$
　then　"$T_1 \not\equiv T_2$" と判定を下す；**halt**
　else if　$p \in F_1$ かつ $\bar{p} \in F_2$
　　then if　$h \neq \varepsilon$
　　　then　"$T_1 \not\equiv T_2$" と判定を下す；**halt**　**fi**　**fi**
　fi
　if　P にスタック縮減操作が適用可能である
　then　P にスタック縮減操作を適用し，P を
　　　checked 状態にする（子節点 P' は

unchecked 状態にある)；
着目節点 P を P' とし，そのラベルを
$(p, \alpha) \equiv h(\bar{p}, \beta)$ とする **fi**
if $\mathrm{FIRST}_{live}(p, \alpha) = \mathrm{FIRST}_{live}(\bar{p}, \beta) = \{\varepsilon\}$
then P を *checked* 状態にする
else
if P が *unchecked* 状態である
then S を，判定木中に存在する，ラベルを
$(p, \alpha') \equiv h'(\bar{p}, \beta')$ とする P 以外の
unchecked 状態ではない節点の集合とする
else S を $\emptyset$ とする **fi**
if S 中に $h' \neq h$ なる節点が存在する
then "$T_1 \not\equiv T_2$" と判定を下す；**halt**
else if S 中に P と同じラベルの節点が存在する
then P を *checked* 状態にする
else if P が跳越し前提条件を満足する
then if P に跳越しが適用可能である
then
P に跳越しを適用し，必要に応じて後続節点を子節点として加える（追加された後続節点は *unchecked* 状態にある)；
if 後続節点が追加されたか，ある後続節点との間の枝ラベルが更新された
then P および全ての *s-checked* 状態の節点を *skipping* 状態にする
else P を *s-checked* 状態にする **fi**
if 追加された P の全ての後続節点に対して基礎チェックを行った結果，基礎チェック失敗となった節点が存在する
then "$T_1 \not\equiv T_2$" と判定を下す；**halt**
fi
else P を *skipping* 状態にする **fi**
else if P に分岐出力チェックが成功する
then
P に分岐を適用し，P を *checked* 状態にする（子節点は全て *unchecked* 状態にある)；
全ての *s-checked* 状態の節点を *skipping* 状態に戻す；
if P の全ての子節点に対して基礎チェックを行った結果，基礎チェック失敗となった節点が存在する
then "$T_1 \not\equiv T_2$" と判定を下す；**halt**
fi
else "$T_1 \not\equiv T_2$" と判定を下す；**halt** **fi**
fi **fi** **fi** **fi**
od
"$T_1 \equiv T_2$" と判定を下す；**halt**

5 終端性・正当性および計算量評価

ここでは，$T_1 \equiv T_2$ および $T_1 \not\equiv T_2$ の各々が真であるときの場合に分けて，本アルゴリズムが多項式時間内で終端することと，判定した結果が正しいことを証明する．

5.1 $T_1 \equiv T_2$ が真である場合

最初に，$T_1 \equiv T_2$ が真であるとき，本アルゴリズムは "$T_1 \equiv T_2$" と判定を下し，多項式時間内の有限の手数で終端することを示す．まず，本アルゴリズムの定義から，"$T_1 \not\equiv T_2$" という判定を下した場合，その判定は明らかに真である．この対偶より，$T_1 \equiv T_2$ が真である場合，本アルゴリズムが有限終端した場合には，正しく "$T_1 \equiv T_2$" との判定を下す．以降，$T_1 \equiv T_2$ が真である場合，本アルゴリズムは多項式時間の有限手数で終端することを証明する．

補題 5.1 $T_1 \equiv T_2$ が真であるとき，可能な限り展開された，全ての節点が *checked* 状態または *s-checked* 状態にある判定木を $T(T_1 : T_2)$ とする．このとき，次の (i)〜(iii) が成立する．
(i) $T(T_1 : T_2)$ 中の任意の節点を $(p, \alpha) \equiv h(\bar{p}, \beta)$ とする．ここで，ある定数

$$\mathcal{S}_1 = (\rho_1 - 1)\,(|Q_1|\,|Q_2| + 1) + |Q_1|,$$

$$\mathcal{S}_2 = (\rho_2 - 1)\,(|Q_1|\,|Q_2| + 1) + |Q_2|$$

について，$|\alpha| \leq \mathcal{S}_1$ かつ $|\beta| \leq \mathcal{S}_2$ が成立する．また，$||h|| \leq \tau\,|Q_1|\,|Q_2|$ が成立する．
(ii) $T(T_1 : T_2)$ 中の全ての節点の個数は，次の定数 $\mathcal{S}_T$ 以下である．

$$\mathcal{S}_T = |Q_1|(\mathcal{S}_1 + 1)\,|Q_2|(\mathcal{S}_2 + 1) \times (\mathrm{Max}\{|\Sigma|, |Q_1|\,|Q_2|\} + 1).$$

(iii) $T(T_1 : T_2)$ 中の任意の 2 節点間の枝ラベルを "$u\backslash x/v$" とする．ここで，ある定数

$$\mathcal{S}_I = \mathrm{Max}\{k_1\,\mathcal{S}_1,\, k_2\,\mathcal{S}_2\}$$

について，$|x| \leq \mathcal{S}_I$, $|u| \leq \tau_1\,\mathcal{S}_I$, $|v| \leq \tau_2\,\mathcal{S}_I$ が成立する．

(証明) (i) について，$|\alpha| \leq \mathcal{S}_1$ かつ $|\beta| \leq \mathcal{S}_2$ が成立す

ることは，定義4.2〜4.5を考慮することによって，文献[6]，Lemma 5.1の証明と同様にして得られる．また，状態対 $(p,\bar{p}) \in Q_1 \times Q_2$ に対して h が一意に定まることから，$||h|| \leq \tau |Q_1||Q_2|$ が得られる．(ii) については，(i) および，分岐，跳越しの各操作による子節点の個数の上限から得られる．(iii) について，枝ラベル中の入力記号列 x が最も長いのは，着目節点に跳越しが適用されたときであり，これは可能な限り短いものに更新されるため，$|x| \leq \mathcal{S}_I$ が成立する．よって，$|u| \leq \tau_1 \mathcal{S}_I$，$|v| \leq \tau_2 \mathcal{S}_I$ が直ちに得られる．□

$T_1 \equiv T_2$ が真であるとき，判定木中の一つの節点に対する分岐，跳越し，スタック縮減の各操作がそれぞれ，$|Q_1|, |Q_2, |\Sigma|, |\mu_1|, |\mu_2|, k_1, k_2$ に関する多項式オーダの時間内で完了することは容易に証明できる．ここで，$k_i \, (i=1,2)$ については，文献[13], pp.1711-1712, Lemma 10より，$k_i \leq \rho_i |Q_i|^3$ が成立することが示されている．また，判定木の展開に応じた跳越し被適用節点に対する跳越し適用の見直し回数も，節点数（多項式オーダ）以下である．更に，判定木中の任意の節点 $(p,\alpha) \equiv h(\bar{p},\beta)$ に対して，$N(p,\alpha) \neq \emptyset$，$N(\bar{p},\beta) \neq \emptyset$，$L(p,\alpha) \neq \emptyset$，および $L(\bar{p},\beta) \neq \emptyset$ の各々が成立するか否かを調べることも，上記の定数に関する多項式時間内で完了できる．従って，$T_1 \equiv T_2$ が真であるとき，本アルゴリズム全体が，$|Q_1|, |Q_2|, |\Sigma|, |\mu_1|, |\mu_2|$ に関する多項式時間内で終端する．

5.2 $T_1 \not\equiv T_2$ が真である場合

次に，$T_1 \not\equiv T_2$ が真であるとき，本アルゴリズムは "$T_1 \not\equiv T_2$" と判定を下し，多項式時間内の有限の手数で終端することを示す．前節の証明から，$T_1 \not\equiv T_2$ が真であるときも，明らかに，本アルゴリズムは多項式時間内で終端する．従って，以降，$T_1 \not\equiv T_2$ であるとき，本アルゴリズムが誤って "$T_1 \equiv T_2$" との判定を下すことのないことを示す．

補題 5.2　$T_1 \not\equiv T_2$ が真であるとき，本アルゴリズムは "$T_1 \not\equiv T_2$" と判定を下す．

(証明)　本補題の証明のため，その対偶として，本アルゴリズムが "$T_1 \not\equiv T_2$" と判定を下すことなく終端した場合，$T_1 \equiv T_2$ が真に成立することを証明する．そのためには，十分拡張され展開を止めた時点の判定木を $T(T_1:T_2)$ とし，任意の正整数 $n (\geq 1)$ に対して，次の Claim E_n が成立することを証明すれば十分である．

Claim $\mathbf{E}_n$　$T(T_1:T_2)$ 中の，分岐または跳越しが適用された任意の節点 $(p,\alpha) \equiv h(\bar{p},\beta)$ について，ある $x \in \Sigma^*$，$u \in \Delta^*$，$q \in F_1$，$\gamma \in \Gamma_1^*$ に対し，

$$(p,\alpha) \xRightarrow[T_1]{x/u}{}^{(n)} (q,\gamma) \tag{5.1}$$

なる推移が存在するならば，ある $v \in \Delta^*$，$\bar{q} \in F_2$，$\bar{\gamma} \in \Gamma_2^*$ に対して，

$$(\bar{p},\beta) \xRightarrow[T_2]{x/v} (\bar{q},\bar{\gamma}), \quad \text{ただし}, u = hv$$

なる推移が可能であり，更に，ある $x_0 \in \Sigma^*$，$u_0, v_0 \in \Delta^*$ に対して，

$$< (p,\alpha) \equiv h(\bar{p},\beta) > \xRightarrow[T(T_1:T_2)]{u_0 \backslash x_0 / v_0} < (q,\gamma_0) \equiv (\bar{q},\bar{\gamma}_0) >$$

なる推移路が存在する．ただし，$|x_0| \leq |x|$, $u_0 = hv_0$，$|\gamma_0| \leq |\gamma|$，$|\bar{\gamma}_0| \leq |\bar{\gamma}|$.

Claim $\mathbf{E}_n$ の証明　(I) $n=1$ のとき　$x = a \in \Sigma$ より，節点 $(p,\alpha) \equiv h(\bar{p},\beta)$ には分岐が適用されている．従って，題意を得ることは容易に証明できる．

(II) $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n \, (n \geq 1)$ が真であると仮定して，$\mathbf{E}_{n+1}$ を考える．

(1) 節点 $(p,\alpha) \equiv h(\bar{p},\beta)$ が分岐節点のとき　推移 (5.1) を次のように分割する．

$$(p,\alpha) \xrightarrow[T_1]{a/u'} (r,\alpha') \xRightarrow[T_1]{x''/u''}{}^{(n)} (q,\gamma)$$

ただし，$x = ax''$, $u = u'u''$, $r \in Q_1$, $\alpha' \in \Gamma_1^+$．節点 $(p,\alpha) \equiv h(\bar{p},\beta)$ は分岐節点であるから，

$$(\bar{p},\beta) \xrightarrow[T_2]{a/v'} (\bar{r},\beta')$$

であり，かつ

$$< (p,\alpha) \equiv h(\bar{p},\beta) > \xrightarrow[T(T_1:T_2)]{u' \backslash a / v'} < (r,\alpha') \equiv t(\bar{r},\beta') >$$

なる推移路が存在する．ただし，$u't = hv'$, $\bar{r} \in Q_2$, $\beta' \in \Gamma_2^+$．節点 $(r,\alpha') \equiv t(\bar{r},\beta')$ が分岐節点または跳越し節点のとき，$\mathbf{E}_n$ を適用することによって題意を得る．また，節点 $(r,\alpha') \equiv t(\bar{r},\beta')$ がスタック縮減節点のとき，その子節点には分岐が適用されており，その節点に $\mathbf{E}_n$ を適用することによって題意を得る．

(2) 節点 $(p,\alpha) \equiv h(\bar{p},\beta)$ が跳越し節点のとき　判定木中に対応節点 $(p,\omega_1) \equiv h(\bar{p},\omega_2)$ $(\alpha = \omega_1\alpha'', \omega_1 \in \Gamma_1^+, \alpha'' \in \Gamma_1^*, \bar{p} \in Q_2, \beta = \omega_2\beta'', \omega_2 \in \Gamma_2^+, \beta'' \in \Gamma_2^*)$ が存在し，(4.6) のような推移路が存在する．また，(4.7) のような，対となる推移が可能である．推移 (5.1) が

$$(p,\omega_1 \mid \alpha'') \xRightarrow[T_1]{x/u}{}^{(n+1)} (q,\gamma_1 \mid \alpha''), \ \gamma = \gamma_1\alpha''$$

と表せる場合，対応節点に $\mathbf{E}_{n+1}$ (1) を適用することによって題意を得る．また，推移 (5.1) が

$$(p, \omega_1 \mid \alpha'') \xRightarrow[T_1]{x'/u'} {}^{(n')} (r, \varepsilon \mid \alpha'') \quad \text{かつ}$$
$$(r, \alpha'') \xRightarrow[T_1]{x''/u''} {}^{(n'')} (q, \gamma)$$

と表せる場合 (ただし，$x = x'x''$, $x', x'' \in \Sigma^+$, $n' + n'' = n + 1$, $u = u'u''$, $r \in Q_1$)，対応節点に $\mathbf{E}_{n'}$ を適用した後，節点 $(p, \alpha) \equiv h(\bar{p}, \beta)$ の後続節点，あるいはその子節点 (後続節点がスタック縮減節点のとき) に $\mathbf{E}_{n''}$ を適用することによって題意を得る．□

以上を総合して，次の定理を得る．

定理 5.1 実時間最終状態受理式決定性限定 1 カウンタ変換器同士の等価性は，その状態集合，スタック記号集合，入力記号集合，推移規則集合の各要素数に関する多項式時間内で判定可能である．

6 むすび

実時間最終状態受理式 droct 対に対して，その等価性判定が多項式オーダの時間で行えることを示した．より一般的な，ε-推移を許した最終状態受理式 droct 対に対しても，多項式時間内で等価性判定が行えるか否かを示すこと等は，今後の課題である．

謝辞 本研究は科学研究費補助金基盤研究 (C) の支援を受けている．

参考文献

[1] O.H. Ibarra, L.E. Rosier, “On the decidability of equivalence for deterministic pushdown transducers,” Inf. Processing Letters **13**, 89-93, 1981.

[2] E. Tomita, “A direct branching algorithm for checking equivalence of some classes of deterministic pushdown automata,” Inform. Control **52**, 187-238, 1982.

[3] E. Tomita, K. Seino, “A direct branching algorithm for checking the equivalence of two deterministic pushdown transducers, one of which is real-time strict,” Theoret. Comput. Sci. **64**, 39-53, 1989.

[4] 若月光夫, 富田悦次, “単純決定性プッシュダウンオートマトンの等価性判定の改良分岐アルゴリズムとその最大時間計算量,” 信学論 (D-I), **J74-D-I**, 9, 595-603, 1991.

[5] E. Tomita, K. Seino, “The extended equivalence problem for a class of non-real-time deterministic pushdown automata,” Acta Informatica **32**, 395-413, 1995.

[6] K. Higuchi, E. Tomita, M. Wakatsuki, “A polynomial-time algorithm for checking the inclusion for strict deterministic restricted one-counter automata,” IEICE Trans. Inf. & Syst., **E78-D**, No.4, 305-313, 1995.

[7] K. Higuchi, M. Wakatsuki, E. Tomita, “A polynomial-time algorithm for checking the inclusion for real-time deterministic restricted one-counter automata which accept by final state,” IEICE Trans. Inf. & Syst., **E78-D**, No.8, 939-950, 1995.

[8] G. Sénizergues, “L(A)=L(B)? decidability results from complete formal systems,” Theoret. Comput. Sci. **251**, Issues 1-2, 1-166, 2001.

[9] Y. Tajima, E. Tomita, M. Wakatsuki, M. Terada, “Polynomial time learning of simple deterministic languages via queries and a representative sample,” Theoret. Comput. Sci. **329**, 203-221, 2004.

[10] C. Bastien, J. Czyzowicz, W. Fraczak, W. Rytter, “Equivalence of simple functions,” Theolet. Comput. Sci. **376**, 42-51, 2007.

[11] 清野 和司, 富田 悦次, 若月 光夫, “ε-推移を許した ある決定性プッシュダウン変換器対の等価性判定,” 信学論 (D), **J90-D**, 10, 2675-2690, 2007.

[12] 清野 和司, 富田 悦次, 若月 光夫, “実時間空スタック受理式決定性限定ワンカウンタ変換器の多項式時間等価性判定,” 信学論 (D), **J91-D**, 5, 1188-1201, 2008.

[13] M. Wakatsuki, E. Tomita, “Polynomial time identification of strict deterministic restricted one-counter automata in some class from positive data,” IEICE Trans. Inf. & Syst., **E91-D**, No.6, 1704-1718, 2008.

[14] 若月 光夫, 清野 和司, 富田 悦次, 西野 哲朗, “空スタック受理式決定性限定ワンカウンタ変換器の多項式時間等価性判定アルゴリズム,” 2009 年度冬の LA シンポジウム資料 No.14, 1-10, 2010.